ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 15.11.2023

Уважаемые студенты! Сегодня мы с вами рассмотрим более сложные тригонометрические уравнения. Одни из этих способов вам, наверное, покажутся трудными, а другие – лёгкими, так как некоторыми приёмами решения уравнений вы уже владеете.

По рабочей тетради повторите

1. Определение арккосинуса, арксинуса, арктангенса, арккотангенса.
2. Формулы решения простейших тригонометрических уравнений вида y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx

Новый материал (конспект в рабочую тетрадь!!!)

Тема: «Тригонометрические уравнения. Основные приемы их решений»

1. Уравнения

1 способ. Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример 1Решить уравнение $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Решение:

Введем новую переменную $y = \sin x$.

Тогда данное уравнение можно записать в виде $2y^2 + y - 1 = 0$. Мы получили квадратное уравнение. Его корнями служат $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -1$. Следовательно, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

В первом случае получим решения

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,$

$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Во втором случае

$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ n \in Z,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ n \in Z$.

Вспомним основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, откуда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Пример 2Решить уравнение $3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$

Решение:
$3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$,
$3 \sin x - 2 (1 - \sin^2 x) = 0$,(воспользуемся тем, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)
$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$,

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \le 1$. Получим квадратное уравнение $2t^2 + 3t - 2 = 0$,

$D = 9 + 16 = 25$.

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}.$$

Таким образом $t_1 = -2;$ $t_2 = \frac{1}{2}$.

$t_1 = -2$ не удовлетворяет условию $|t| \le 1$.

Значит $\sin x = \frac{1}{2}$. Поэтому $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \pi \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Пример 3Решить уравнение $6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0$.

Решение:

Заменяя $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим относительно *cosx* квадратное уравнение
$6(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 2 = 0$
$-6\cos^2 x + 5\cos x + 4 = 0$
$6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$
Введем новую переменную $y = \cos x$.

Тогда $6y^2 - 5y - 4 = 0$, откуда $y_1 = -\frac{1}{2}$ или $y_2 = 1\frac{1}{3}$.

Уравнение $\cos x = 1\frac{1}{3}$ не имеет решений, т.к.$1\frac{1}{3} > 1$.

Решая уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ находим: $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

2 способ. Решение однородных тригонометрических уравнений

Уравнение вида asinx +bcosx =0, где a и b –некоторые числа, называются однородными уравнениями первой степени относительно sinx и cosx.

Пример 1Решить уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

Решение:

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$ - однородное уравнение.

Разделить обе части уравнения на $\cos x$.

Получим $\frac{\sin x}{\cos x}+\sqrt{3}\frac{\cos x}{\cos x}=\frac{0}{\cos x}$, $tgx+\sqrt{3}=0$, $tgx=-\sqrt{3}$

$x=arctg(-\sqrt{3})+\pi n,\ n\in Z$, $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

Уравнения вида a $\sin^2$ x + $b\cos^2$x + c sin x cos x = 0 , где a, b, c –некоторые числа, называются однородными уравнениями второй степени относительно sin x или cos x.

Пример 1Решить уравнение $4\sin^2 x+3\sin x\cos x-7\cos^2 x=0$.

Решение:

$4\sin^2 x+3\sin x\cos x-7\cos^2 x=0$ - однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$.

Получим $4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+3\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}-7\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$.

$4tg^2x+3tgx-7=0$.

Замена переменной : $y=tgx$

$4y^2+3y-7=0$

$D=b^2-4ac=9+112=121,\ y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3\pm 11}{8},\ y_1=1,\ y_2=-1\frac{3}{4}$

$tgx=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

$tgx=-1\frac{3}{4}$, $x=arctg\left(-1\frac{3}{4}\right)+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $x=arctg\left(-1\frac{3}{4}\right)+\pi n,\ n\in Z$.

3 способ. Метод разложения на множители

Пример 1Решить уравнение sin4x = 3 cos2x.

Решение:

Для решения уравнения воспользуемся формулой синуса двойного угла sin 2α = 2 sinα cosα

2 sin 2x cos 2x – 3 cos 2x = 0,

cos 2x (2 sin 2x – 3) = 0. Произведение этих множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей будет равен нулю.

2x = $\frac{\pi}{2}$ + πn, n $\in$ Z   или   sin 2x = 1,5 – нет решений, т.к | sinα| ≤ 1

x = $\frac{\pi}{4}$ + $\frac{\pi}{2}$n;   n $\in$ Z.

Ответ: x = $\frac{\pi}{4}$ + $\frac{\pi}{2}$ n ,   n$\in$ Z.

Пример 2 Решить уравнение $2\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = 1$

Решение:

Применим формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Получим $2\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$, $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$- однородное уравнение.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$.

Получим $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$.

$tg^2 x + 2tgx - 3 = 0$.

Замена переменной: $y = tgx$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$y_1 = 1$, $y_2 = -3$

$tgx = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

$tgx = -3$, $x = -arctg3 + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $x = -arctg3 + \pi n$, $n \in Z$.

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru